Propozicija 9.3. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz funkcija iz $L^p(X)$ koji konvergira u meri ka f i neka postoji $g \in L^p(X)$ tako da važi

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad x \in X \text{ s.s.}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Tada $f \in L^p(X)$ i $f_n \to f$ u $L^p(X)$, $n \to \infty$.

Dokaz: Pretpostavimo da $(f_n)_n$ ne konvergira u $L^p(X)$ ka f; tada postoje podniz $(f_{\nu_n})_n$ i $\varepsilon > 0$ tako da važi

$$\|f_{\nu_n} - f\|_p \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{9.2}$$

Kako podniz niza koji konvergira ka f u meri takođe konvergira u meri ka f, sledi da niz $(f_{\nu_n})_n$ konvergira u meri ka f. Na osnovu prethodnog tvrđenja i Propozicije 9.2, $(f_{\nu_n})_n$ ima podniz koji konvergira u $L^p(X)$ ka f, što je u kontradikciji sa (9.2). ∎

Teorema 9.2. (Vitalijeva teorema o konvergenciji.) Dat je merljiv prostor $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz u $L^p(X)$, $p \in [1, \infty)$. Tada, $f_n \to f$ u $L^p(X)$, $n \to \infty$, ako i samo ako su zadovoljena sledeća tri uslova:

(1.) $f_n \to f$ u meri, $n \to \infty$.